

7

Variables aléatoires discrètes

1. Loi de probabilité d'une variable aléatoire, Espérance

On appelle "Loi de probabilité" le tableau qui permet de rassembler les valeurs dans la première ligne, et les fréquences (ou les effectifs) de ces valeurs dans la deuxième ligne.

Exemple 7.1 On lance un dé à six faces.

- Si le résultat est 6, on gagne 2€
- Si le résultat est pair et inférieur strictement à 6 on ne gagne ni ne perd rien
- Sinon on perd 1€

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique (c'est-à-dire positif ou négatif) du joueur. On a alors :

Issue	1	2	3	4	5	6
Valeur de X	-1	0	-1	0	-1	2

Attention, ce tableau permet de visualiser ce qui se passe : il ne représente **pas** la "loi".

On remarque que l'événement $(X = 2)$ est le même que l'événement "obtenir un 6". De même, l'événement $(X = 0)$ est le même que l'événement "obtenir un 2 ou un 4". On peut donc définir un événement en utilisant la variable aléatoire X .

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire est donnée dans le tableau suivant :

Valeur x_i de X	-1	0	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Exercice 7.1 On lance quatre fois une pièce de monnaie équilibrée. N est la variable aléatoire donnant le nombre de "face" obtenu. Déterminez la loi de probabilité de N .

Diagramme d'arbre pour 4 lancers de pièce :

```

    L1: P (1/2), F (1/2)
    L2: P (1/4), PF (1/4), FP (1/4), FF (1/4)
    L3: P (1/8), PPF (1/8), PFP (1/8), PFF (1/8), FPF (1/8), FFF (1/8), FFP (1/8), FFF (1/8)
    L4: P (1/16), PPF (1/16), PFP (1/16), PFF (1/16), FPF (1/16), FFF (1/16), FFP (1/16), FFF (1/16)
  
```

Tableau de la loi de probabilité de N :

Valeur x_i de N	0	1	2	3	4
$p(N = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(N) = 2$

Equiprobabilité = chaque issue a une probabilité de $\frac{1}{16}$

Définition 7.1 Soit une loi de probabilité

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On appelle espérance le réel $E(X)$ défini par :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3 \dots = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Interprétation :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est l'équivalent en probabilité de ce qu'est la moyenne d'une série statistique en statistiques.

Exemple 7.2 Reprise de l'exemple :

$$E(X) = (-1) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

Remarques :

- Dans un jeu où X est associé aux gains possibles, $E(X)$ représente le gain moyen que l'on peut espérer. Le jeu est dit *équitable* si $E(X) = 0$.
- Si on réalisait une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, les résultats statistiques (fréquences, moyenne) se rapprocheraient des résultats trouvés via le modèle théorique probabiliste (probabilités, espérance).

Exercice 7.2 Dans une production de pièces industrielles, on considère la variable aléatoire X qui associe à chaque pièce son coût de fabrication. Soit la loi de probabilité de X :

x_i	73	112	155	185
$P(X = x_i)$	0,19	0,32	0,15	0,34

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X

$$E(X) = 73 \times 0,19 + 112 \times 0,32 + 155 \times 0,15 + 185 \times 0,34$$

$$\approx 135,86$$

2. Interpréter cette espérance

le coût moyen de fabrication d'une pièce est 135,86 €

Exercice 7.3 Dans un devoir, un enseignant propose trois questions indépendantes de type "Vrai ou faux". :

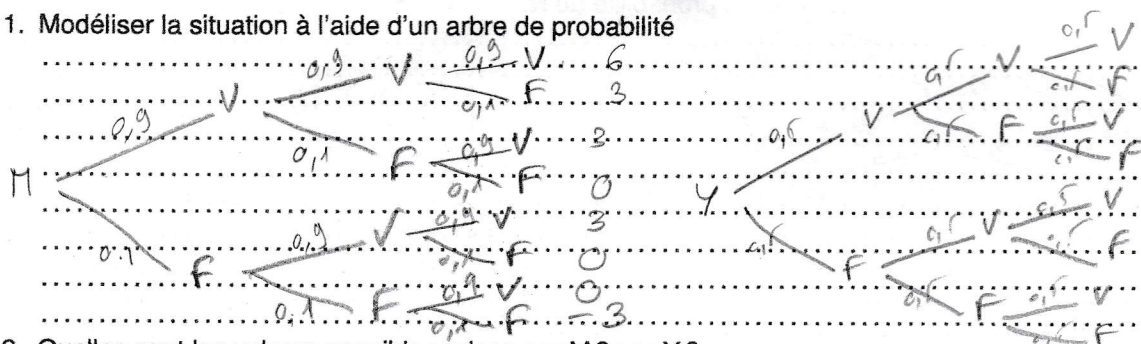
- Chaque réponse fautive ou absence de réponse fait perdre un point à l'élève
- Chaque réponse juste fait gagner deux points à l'élève

Mehdi a bien préparé ce devoir et, pendant ses révisions, il répondait correctement à 90% des questions de ce type. On estimera donc que la probabilité qu'il réponde juste à une question est de 0,9.

Yvan, quant à lui, n'a pas révisé du tout et a décidé de répondre au hasard à toutes les questions.

On note M la variable aléatoire associée au nombre de points (pas au nombre de réponses justes) obtenus par Mehdi, et Y la v.a. associée aux points d'Yvan.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilité



2. Quelles sont les valeurs possibles prises par M ? par Y ?

M et Y peuvent prendre les valeurs 6, 3, 0, -3

3. Déterminer les lois de probabilités de M et de Y (on fera donc deux tableaux différents)

x_i	6	3	0	-3
$P(M = x_i)$	0,279	0,243	0,27	0,001

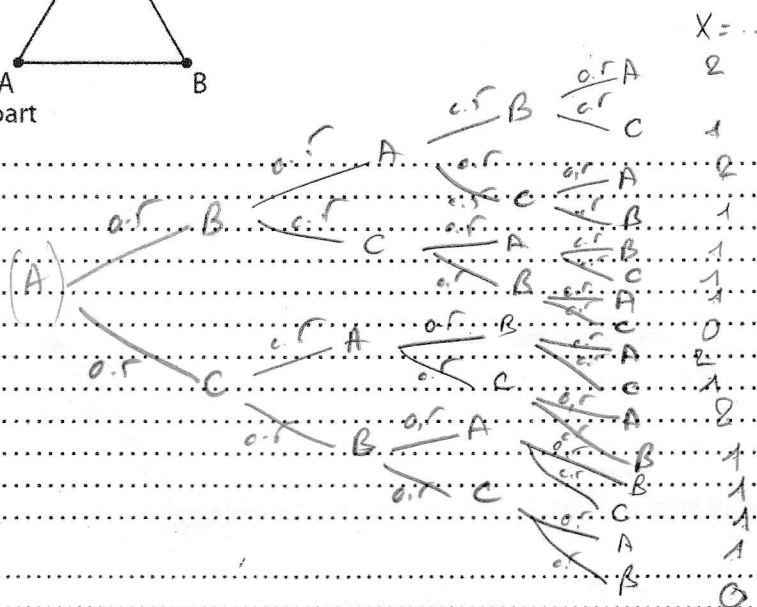
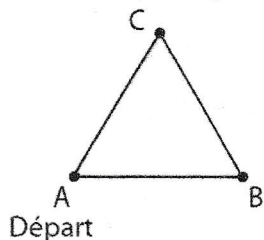
x_i	6	3	0	-3
$P(Y = x_i)$	0,1875	0,375	0,375	0,125

4. Déterminer l'espérance de M, l'espérance de Y. Que pensez-vous de ces résultats ?

$E(M) = 5,1$ (note moyenne / 6pts)

$E(Y) = 1,5$ (note moyenne / 6pts)

Exercice 7.4 Un mobile se déplace sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC. A chaque sommet, il choisit sa direction au hasard. Parti de A, il effectue quatre déplacements. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de passages en A, départ non compris. déterminez la loi de probabilité de X.



$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,125	0,625	0,25

$2 \times 0,5^4$ $10 \times 0,5^4$ $4 \times 0,5^4$